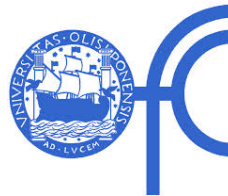


**Instituto Superior das Ciências do Trabalho e da
Empresa**

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Departamento de Finanças do ISCTE

Departamento de Matemática da FCUL



Avaliação de Opções Barreira segundo o Modelo CEV

Ana Raquel dos Santos Cabral Sacadura

(Licenciada)

Dissertação Submetida para Obtenção do Grau de Mestre em Matemática Financeira

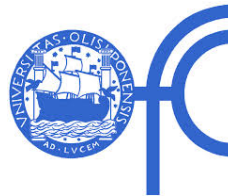
Setembro de 2013

**Instituto Superior das Ciências do Trabalho e da
Empresa**

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Departamento de Finanças do ISCTE

Departamento de Matemática da FCUL



Avaliação de Opções Barreira segundo o Modelo CEV

Ana Raquel dos Santos Cabral Sacadura

(Licenciada)

Dissertação Submetida para Obtenção do Grau de Mestre em Matemática Financeira

Setembro de 2013

Abstract:

This work is devoted to the valuation of barrier options when the underlying asset follows a constant elasticity of variance (CEV) process. One of the most used models in finance, the Black-Scholes model, is known to be ineffective in evaluating options because it assumes constant volatility, which does not fit the financial markets. To solve this problem, the CEV model is explored and implemented through lattice methods: a trinomial tree of asset prices proposed by Boyle and Tian (1999) is implemented in Matlab. This approach uses a discrete approximation of the CEV model, and is made for different parameter constelations in order to verify its efficiency in pricing European-style options as well as American-style standard and barrier options.

Concerning the contributions to the literature, this thesis provides four extensions to the work of Boyle and Tian (1999): The parameter (α) will be generalized to $\alpha \in \Re$ (instead of $\alpha \leq 2$); The valuation of European and American-style knock-in options will be developed; The analysis of Boyle and Tian (1999) in order to evaluate barrier options with a non zero rebate and with a non zero dividend yield not null ($q \neq 0$).

Keywords: CEV model, Trinomial trees, barrier options.

JEL Classification:G13

Resumo

O presente trabalho é dedicado à avaliação de opções barreira quando o activo subjacente segue um processo CEV. Um dos modelos mais utilizados em Finanças, o modelo de Black-Sholes, demonstra-se ineficaz na avaliação de opções pois assume uma volatilidade constante, o que não acontece nos mercados financeiros. Tendo como objectivo a resolução deste problema, o modelo CEV é adoptado e implementado via método *lattice*: a árvore trinomial de preços é implementada em Matlab. Esta abordagem usa uma aproximação discreta do modelo CEV e é feita para diferentes parâmetros com a finalidade de verificar a sua eficiência na avaliação de opções Europeias e Americanas *standard* e com barreira.

Esta tese propõe quatro contributos adicionais face ao trabalho já desenvolvido por Boyle and Tian (1999): O parâmetro de elasticidade (α) irá ser generalizado para $\alpha \in \mathfrak{R}$ (ao invés de $\alpha \leq 2$); A avaliação de opções *knock-in*; A análise de Boyle and Tian (1999) será generalizada de modo a avaliar opções barreira com *rebate* não nulo e com uma *dividend yield* diferente de zero ($q \neq 0$).

Palavras Chave: modelo CEV, método trinomial, opções com barreira.

JEL Classification:G13

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 13 |
| 2 | Revisão de literatura | 17 |
| 3 | Modelo de Black Scholes e Modelo CEV | 21 |
| 3.1 | Modelo de Black Scholes | 21 |
| 3.2 | Modelo CEV | 21 |
| 4 | Método trinomial | 23 |
| 4.1 | Construção da árvore trinomial | 23 |
| 4.2 | Determinação das probabilidades | 25 |
| 5 | Modelo trinomial aplicado às opções barreira | 27 |
| 5.1 | Ajuste dos nós da árvore sobre as barreiras | 27 |
| 5.2 | Avaliação de opções | 29 |
| 5.2.1 | Opções Europeias standard | 29 |
| 5.2.2 | Opções Europeias com barreira | 30 |
| 5.2.3 | Opções Americanas | 33 |
| 6 | Resultados numéricos | 37 |
| 7 | Conclusões | 49 |
| A | Algoritmo de avaliação de uma opção Americana <i>standard call</i> em Matlab | 55 |
| B | Algoritmo de avaliação de uma opção Americana <i>double knock-out call</i> em Matlab | 56 |

| | | |
|---|---|----|
| C | Algoritmo de avaliação de uma opção Americana <i>double knock-in call</i> em Matlab | 58 |
|---|---|----|

Lista de Tabelas

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Knock-Out European Call | 39 |
| 2 | Knock-Out European Put | 40 |
| 3 | Knock-Out American Call | 41 |
| 4 | Knock-Out American Put | 42 |
| 5 | Knock-In European Call | 43 |
| 6 | Knock-In European Put | 44 |
| 7 | Knock-In American Call | 45 |
| 8 | Knock-In American Put | 46 |
| 9 | Knock-Out European Call com $q=9\%$ | 47 |
| 10 | Knock-Out American Call com $q=9\%$ | 48 |

1 Introdução

As opções são contratos financeiros derivados, ou seja, o valor de uma opção e os seus termos de negociação estão vinculados a um activo subjacente. Uma opção confere ao seu titular o direito, e não a obrigação, de comprar ou vender um determinado activo por um determinado valor estipulado no contrato (preço de exercício) enquanto que o vendedor tem o dever de concluir a transação. Quando uma opção de compra (*call option*) é exercida, o seu detentor paga pelo activo subjacente o preço de exercício. Se for exercida uma opção de venda (*put option*), o seu proprietário (comprador) recebe o preço de exercício. A maturidade da opção é também um factor importante porque se o titular da opção não exerce o seu direito antes do fim do periodo de tempo pré-determinado (maturidade), a opção extingue-se.

As opções exóticas proporcionam um perfil de resultados diferente das habituais opções *standard*. Existem inúmeros tipos de opções exóticas, cada uma com o seu perfil específico de pagamento. Em particular, as opções barreira são um tipo de opções exóticas onde o direito de exercício do contrato depende de o preço do activo subjacente atingir ou não um determinado nível, designado por "barreira". Estas opções podem ser "Americanas", caso o direito possa ser exercido em qualquer instante desde o momento em que o contrato é celebrado até á sua maturidade, ou "Europeias", caso o detentor da opção possa exercer o direito apenas na data de vencimento do contrato. Neste trabalho vamos estudar as opções *standard* e de barreira, Europeias e Americanas.

O cálculo do valor das opções barreira baseia-se no facto da cotação do activo subjacente atingir, ou não, um determinado nível, designado por "barreira", até à maturidade do contrato. Quando as opções têm apenas uma barreira são designa-

das como *single barrier*, se tiverem duas barreiras distintas (inferior e superior) são designadas como *double barrier*. As opções barreira podem ser *knock-in*, as quais são activadas apenas quando o preço do activo alcança a barreira, e *knock-out*, as quais se extinguem assim que o preço do activo atinge a barreira. No caso em que a opção nunca é activada ou desactivada, alguns contratos pagam ao titular uma compensação predefinida (*rebate*). As opções barreira podem ainda ser divididas em *up* ou *down* caso o preço do activo subjacente na data de celebração do contrato seja inferior ou superior ao valor da barreira, respectivamente. Nas opções *double barrier* é definido o intervalo para a flutuação do preço do activo subjacente. Numa opção *double barrier knock-out* (combinação de uma *barrier up-and-out* e de uma *barrier down-and-out*) basta uma das barreiras ser atingida para que a opção se extinga.

Para que as opções possam ser avaliadas de forma precisa é muitas vezes necessário recorrer a métodos numéricos. Um dos métodos computacionais mais populares e usados em Matemática Financeira para avaliação de opções americanas é o modelo binomial publicado por Cox, Ross and Mark (1979). A ideia básica usada para a construção do método binomial foi a estratégia de replicação da carteira de *hedging*. É de salientar a escassez de modelos eficientes para avaliar a maioria das opções Americanas com combinações de barreiras. Os métodos numéricos, em particular o modelo binomial quando aplicado às opções com barreiras, além de requerer muito tempo de processamento, já que são exigidas várias iterações para redução do erro inerente ao processo, tornam também a avaliação dependente do caminho, ocasionando tempo de computação exponencial. Apesar de tudo, os modelos baseados em grelhas são precisos e flexíveis, não necessitando de formulação de uma equação às derivadas parciais visto partirem directamente do processo estocástico de difusão dos preços do activo. Mais tarde, Boyle (1986) formalizou uma extensão deste modelo para avaliação de opções com barreira: o modelo trinomial.

O modelo de Black and Scholes (1973) foi revolucionário na área financeira. No entanto, o mesmo não incorpora o efeito da *volatility smile*: curva em forma de "U" que resulta da observação da volatilidade implícita de opções com igual maturidade e diferentes preços de exercício (ver, por exemplo, Hull (2010), Figura 18.1). O modelo CEV, desenvolvido por Cox (1975), inclui este efeito da *volatility smile*.

Esta tese descreve o método trinomial e a sua utilização para avaliar os vários tipos de opções no modelo CEV, estando estruturada em quatro capítulos. No primeiro capítulo é feita uma síntese da literatura relacionada onde são explicados os vários modelos e a justificação da escolha do modelo CEV para avaliar as opções, sendo também feito um resumo do trabalho de avaliação de opções barreira. No segundo capítulo é explicado, em detalhe, o método trinomial e como este é usado para avaliar os vários tipos de opções considerados nesta tese. No terceiro capítulo são apresentados os resultados obtidos através da avaliação de vários contratos com diferentes barreiras e preços de exercício. Finalmente, no quarto capítulo, é feita uma crítica ao trabalho desenvolvido e aos resultados obtidos.

2 Revisão de literatura

A avaliação de opções é um dos temas mais importantes na área da Matemática Financeira, onde se procura determinar um valor justo para o preço de uma opção tendo por base o uso de processos estocásticos. O modelo de Black and Scholes (1973) foi pioneiro e assume que o preço do activo subjacente segue um movimento geométrico Browniano. Na mesma data, Merton(1973) conseguiu determinar uma solução fechada para o valor das opções Europeias *standart* (*call e put*) e opções Europeias *down-and-out call*. Este feito deu início à investigação aprofundada sobre a avaliação de opções barreira. Rubinstein and Reiner (1991) e Carr (1995) estabeleceram soluções fechadas para as opções *single barrier*. Boyle and Lau (1994) estudaram as opções barreira recorrendo ao modelo binomial.

O modelo de Black and Scholes (1973) considera a volatilidade do preço do activo subjacente constante, mas a investigação empírica mostra que isto não acontece, ou seja, o preço do ativo subjacente não segue uma distribuição log-normal, Hull (2010), Figura 18.2. Black (1976) e Christie (1982) tiveram em conta o efeito da alavancagem financeira na variância da taxa de rentabilidade do activo subjacente. Schmalensee and Trippi (1978) encontraram uma relação negativa entre as alterações nos preços da acção e as alterações na volatilidade implícita. Hull (2010) designou esta relação por *volatility smile*, devido à curva evidenciada pelo gráfico da volatilidade implícita em função do preço de exercício.

Black and Scholes (1973) não previram o efeito da *volatility smile*, como tal tiveram de ser desenvolvidos outros modelos que tivessem em conta este resultado. Um deles é o modelo CEV (Constant Elasticity of Variance) que foi desenvolvido por Cox (1975) como uma extensão do modelo de Black and Scholes (1973). No

modelo CEV a volatilidade do activo subjacente está relacionada com o preço desse mesmo activo. Este modelo é realista pois é observável que a volatilidade do activo subjacente sofre alterações em resultado de oscilações no preço do activo subjacente. Cox (1975) estudou o modelo CEV para o caso em que a elasticidade da volatilidade face ao preço, a constante α , é menor que 2 e mais tarde, Emanuel and MacBeth (1982) estenderam o parâmetro α para valores maiores que 2. Contudo, Reiner (1994) e Jackwerth and Rubinstein (2001) descobriram que os valores da elasticidade implícita do modelo CEV podiam-se estender a valores tão baixos quanto $\alpha = -4$ ou $\alpha = -6$ (crash no índice de opções S&P500).

Vários autores relacionaram o modelo CEV de Cox com o modelo de Black and Scholes (1973). MacBeth and Merville (1980) verificaram a relação negativa entre a volatilidade e o preço do activo subjacente, o que ia de encontro às especificações do modelo CEV, e confirmaram também que os preços obtidos pelo modelo CEV aproximavam-se mais da realidade do que o modelo de Black-Scholes, especialmente no caso $\alpha < 2$. Boyle and Tian (1999) concluíram que as diferenças entre os resultados obtidos pelos dois modelos são maiores para opções *path-dependent* do que para opções *standard*.

A avaliação de opções barreira através do modelo CEV foi implementado por Boyle and Tian (1999) recorrendo a uma árvore trinomial para avaliar *single* e *double barriers*. Lo, Yuen and Hui (2000) conseguiram introduzir parâmetros dependentes do tempo no modelo CEV e assim obtiveram fórmulas fechadas para a avaliação de opções. Ainda não existe uma solução precisa para a avaliação de opções barreira Europeias com parâmetros dependentes do tempo. Mas, Lo and Hui (2006) generalizaram a técnica desenvolvida por Lo et al. (2000) e obtiveram expressões analíticas para os kernels da fórmulas de avaliação do modelo CEV para as opções *knock-out*.

Esta tese considera que o preço do activo subjacente segue o processo CEV com

parâmetros independentes do tempo. Baseia-se na investigação de Boyle and Tian (1999) para a implementação de uma árvore trinomial de preços do activo subjacente, tendo como objectivo final avaliar opções Europeias e Americanas *standard* e com barreira. A ferramenta usada é o Matlab. Com o objectivo de analisar o efeito do factor de elasticidade α do processo CEV, a avaliação das opções é feita para diferentes valores de α , preços de exercício e barreiras.

3 Modelo de Black Scholes e Modelo CEV

3.1 Modelo de Black Scholes

O modelo de Black Scholes (1973) pressupõe que o preço do activo subjacente segue um movimento geométrico Browniano,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t, \quad (1)$$

onde Z_t é um processo de Wiener standard, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Isto significa que a variação do preço do activo subjacente no intervalo de tempo dt é normalmente distribuída com média μdt e variância $\sigma^2 dt$. Este modelo considera a volatilidade do preço do activo subjacente constante, mas a investigação empírica mostra que o preço do activo subjacente não segue uma distribuição lognormal. Modelos alternativos têm vindo a ser desenvolvidos e aplicados à avaliação de opções. Este trabalho adopta o modelo CEV para avaliar opções Europeias e Americanas, *standard*, *single barrier* ou *double barrier*.

3.2 Modelo CEV

O modelo CEV (1975) assume que o preço do activo subjacente S_t , expresso na medida \mathbb{P} , segue o seguinte processo de difusão:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^{\frac{\alpha}{2}} dZ_t, \quad (2)$$

onde α é a constante de elasticidade. Para avaliar opções usamos a medida neutra ao risco \mathbb{Q} . Assim, temos de transformar o processo (2) numa \mathbb{Q} -martingala (Duffie 1996, section 22.k):

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t^{\frac{\alpha}{2}} dZ_t, \quad (3)$$

onde $r - q$ representa o retorno esperado do activo subjacente, r a taxa de juro sem risco e q a *dividend yield*, ambas constantes. Note-se que a análise de Boyle and Tian (1999) é agora generalizada para $q \neq 0$.

O modelo CEV engloba três modelos particulares:

- Quando $\alpha = 0$, estamos perante o modelo de Merton (1973).
- Quando $\alpha = 1$, temos o square root process, Cox and Ross (1976).
- Quando $\alpha = 2$, a volatilidade é a constante σ representando o modelo de Black and Scholes (1973) .

4 Método trinomial

O modelo trinomial utiliza a técnica de avaliação neutra ao risco. Este método diferencia-se do modelo binomial pois possui, para cada nó da árvore, três novos caminhos a seguir: aumento do preço do activo, manutenção do preço do activo e redução do mesmo. O modelo simples de um só passo é a seguir ilustrado na Figura 1, sendo $S_j = S_0 + j\Delta S$, para $\Delta S \in \mathfrak{R}_+$ e $j, k \in \mathbb{Z}$:

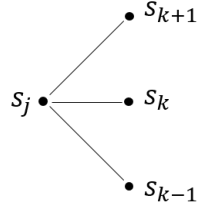


Figura 1: Um passo do método trinomial

4.1 Construção da árvore trinomial

Com o intuito de obter um processo estocástico equivalente ao processo S mas com volatilidade constante, vamos considerar uma nova função y que é apenas função do preço do activo S_t :

$$y = y(S_t). \quad (4)$$

Aplicando o Lema de Itô e utilizando a equação (3), pode-se escrever:

$$dy_t = \dots dt + \frac{\partial y}{\partial S} \sigma S_t^{\frac{\alpha}{2}} dZ_t, \quad (5)$$

Para garantirmos que o processo estocástico acima descrito tem volatilidade constante, igualamos a volatilidade a uma constante positiva $v \in \mathfrak{R}_+$:

$$\frac{\partial y}{\partial S} \sigma S_t^{\frac{\alpha}{2}} = v. \quad (6)$$

Isto é equivalente a

$$\frac{\partial y}{\partial S} = \frac{v}{\sigma} S_t^{-\frac{\alpha}{2}}. \quad (7)$$

Primitivando ambos os lados da equação (7), chegamos à seguinte relação:

$$y_j = \begin{cases} \frac{v}{\sigma} \log(S_j), & \text{para } \alpha = 2 \\ \frac{v}{\sigma(1 - \frac{\alpha}{2})} S_j^{1 - \frac{\alpha}{2}}, & \text{para } \alpha \neq 2 \end{cases} \quad (8)$$

sendo y_0 dado pelo sistema (8) para $S_j = S_0$, onde S_0 é o preço inicial do activo.

A ideia principal do modelo trinomial é a de que o caminho aleatório contínuo descrito pela equação diferencial estocástica (3), ou seja pelo modelo CEV, pode ser modelado através de um caminho aleatório discreto onde o preço do activo S_t muda apenas em tempos discretos: $\Delta t, 2\Delta t, \dots, M\Delta t = T$. T é a maturidade da opção e Δt representa um intervalo de tempo pequeno, mas não infinitesimal, entre movimentos no preço do contrato.

Para assegurar a estabilidade do método trinomial temos de respeitar a condição dada por

$$\Delta y = \lambda v \sqrt{\Delta t}, \quad (9)$$

sendo $\lambda \geq 1$ uma constante arbitrária e $y_j = y_{j-1} + \Delta y$.¹

Portanto a árvore dos y 's terá a seguinte configuração:

Para construir a árvore dos S 's basta usar a transformação inversa do sistema (8). Para qualquer $y_j > 0$ temos que

$$S_j = \begin{cases} e^{y_j \frac{\sigma}{v}}, & \text{para } \alpha = 2 \\ \left[\frac{\sigma(1 - \frac{\alpha}{2})}{v} y_j \right]^{\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}}}, & \text{para } \alpha \neq 2 \end{cases} \quad (10)$$

sendo que para qualquer $y_j \leq 0$, $S_j = 0$.

¹ À semelhança de Boyle and Tian (1999), iremos considerar $\lambda = \sqrt{1,5}$.

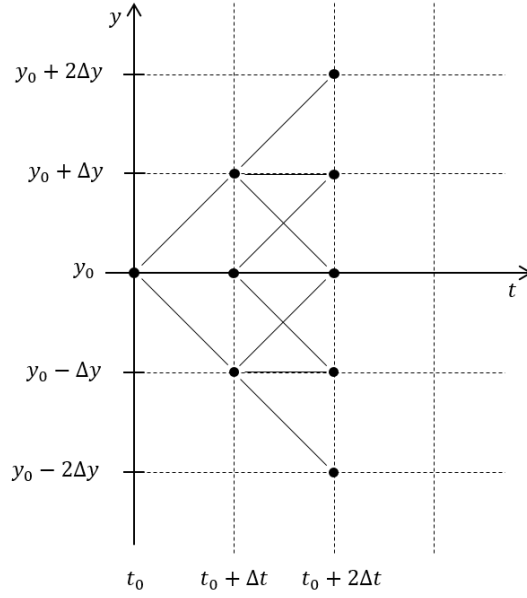


Figura 2: Árvore trinomial dos y's

4.2 Determinação das probabilidades

Numa árvore trinomial simples temos $k = j$, o que funciona bem para o modelo lognormal, ou seja, quando $\alpha = 2$. Para valores de $\alpha \neq 2$, temos de ter $k \neq j$ de modo a permitir que as probabilidades de subida (p_1), manutenção (p_2) e descida (p_3) do preço do activo sejam positivas. Consequentemente:

$$\begin{cases} p_1(j) + p_2(j) + p_3(j) = 1 \\ p_1(j)S_{k+1} + p_2(j)S_k + p_3(j)S_{k-1} = M_j \\ p_1(j)S_{k+1}^2 + p_2(j)S_k^2 + p_3(j)S_{k-1}^2 = M_j^2 + V_j \end{cases} \quad (11)$$

com

$$M_j = S_j + (r - q)S_j\Delta t \quad (12)$$

e

$$V_j = \sigma^2 S_j^\alpha \Delta t. \quad (13)$$

Resolvendo o sistema (11), obtemos:

$$\begin{cases} p_1(j) = \frac{(S_k - M_j)(S_{k-1} - M_j) + V_j}{(S_k - S_{k+1})(S_{k-1} - S_{k+1})} \\ p_2(j) = \frac{(S_{k+1} - M_j)(S_{k-1} - M_j) + V_j}{(S_{k+1} - S_k)(S_{k-1} - S_k)} \\ p_3(j) = \frac{(S_{k+1} - M_j)(S_k - M_j) + V_j}{(S_{k+1} - S_{k-1})(S_k - S_{k-1})}. \end{cases} \quad (14)$$

Temos de construir a árvore dos y 's segundo o processo de difusão contínuo dado pela equação (3), garantindo probabilidades não negativas. A escolha do k tem de ser cuidadosa, na medida em que o preço do activo S_k tem de corresponder ao preço esperado do activo no final do período de tempo seguinte. Isto significa que temos de respeitar a seguinte condição:

$$S_k = S_j + (r - q)S_j\Delta t. \quad (15)$$

Simplificando para a variável y , ficamos com

$$y_k = y_j + (1 + (r - q)\Delta t)^{1 - \frac{\alpha}{2}} \quad (16)$$

para $S_j > 0$, o que é equivalente a

$$k = \frac{y_j(1 + (r - q)\Delta t)^{1 - \frac{\alpha}{2}} - y_0}{\lambda v \sqrt{\Delta t}}. \quad (17)$$

Finalmente, escolhemos o inteiro mais próximo do valor de k dado pela equação (17).

5 Modelo trinomial aplicado às opções barreira

5.1 Ajuste dos nós da árvore sobre as barreiras

O método trinomial não pode ser aplicado directamente para avaliar opções barreira. Boyle and Lau (1994) estudaram o impacto no preço de uma dada opção quando a barreira está entre duas filas de nodos horizontais e concluíram que no processo de discretização geralmente não existe uma fila de nodos horizontais que represente a(s) barreira(s), o que leva a erros significativos na sua avaliação.

Consideremos, por exemplo, uma opção *down-and-out* com a barreira entre dois nós como mostra a Figura 3. Quando fazemos a avaliação da opção através da grelha

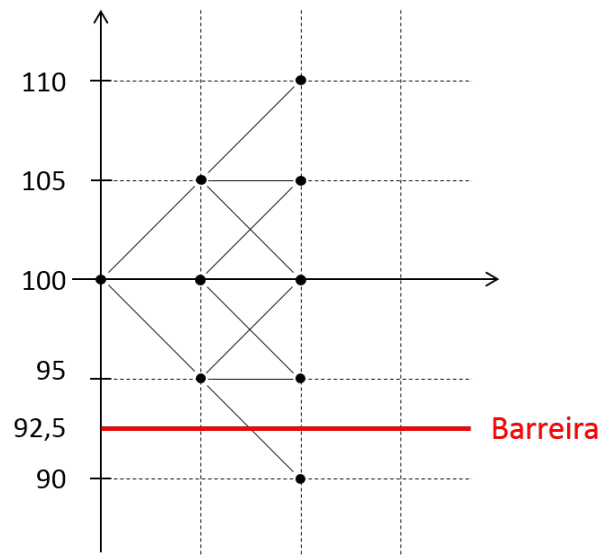


Figura 3: Opção down and out

trinomial da Figura 3, a opção só vai ser desactivada quando o preço atingir os 90 euros e não quando atingir os 92,5 euros (como devia ser). A solução para este problema consiste numa reposição dos nós da árvore de tal modo que a(s) barreira(s)

sejam definidas por uma fila de nós horizontais. Para fazer o reajustamento dos nós da árvore recorremos ao *stretch parameter*, λ , proposto por Ritchken (1995). Com o cálculo do *stretch parameter* é possível ajustar a largura da árvore de tal forma que as barreiras coincidam com os nodos da árvore.

Vamos considerar, por exemplo, uma opção barreira *down-and-out*, com barreira inferior igual a Bd ($< S_0$). Pretendemos obter uma camada horizontal de nós na barreira, logo temos de obedecer a:

$$S_j = Bd, \quad \text{para algum inteiro } j. \quad (18)$$

Tal é equivalente a ter:

$$y_d = y_0 + j\lambda_d v\sqrt{\Delta t}, \quad (19)$$

onde

$$y_d = \begin{cases} \frac{v}{\sigma} \log(B_d), & \text{para } \alpha = 2 \\ \frac{v}{\sigma(1 - \frac{\alpha}{2})} B_d^{1 - \frac{\alpha}{2}}, & \text{para } \alpha \neq 2 \end{cases} \quad (20)$$

e λ_d é um *stretch parameter* a definir.

Resolvendo a equação (19) em ordem a j , obtemos:

$$j = \frac{y_d - y_0}{\lambda_d v\sqrt{\Delta t}}. \quad (21)$$

Consequentemente, o novo *stretch parameter* é definido pela equação

$$\lambda_d = \frac{y_d - y_0}{J_d v\sqrt{\Delta t}}, \quad (22)$$

onde J_d é o inteiro mais próximo de j .

Desta forma asseguramos que uma camada horizontal de nós é colocada no local exacto da barreira da opção. Determinado o novo *stretch parameter* λ_d , a árvore trinomial é construída de acordo com as equações (14) e (17). Agora o modelo trinomial pode ser aplicado para avaliar opções barreira *down*.

No caso de uma opção barreira *up*, o *stretch parameter* λ_u , calcula-se usando o mesmo processo atrás descrito.

Nas opções *double barrier* é necessário determinar dois novos *stretch parameters*, λ_d e λ_u , para garantir que duas camadas horizontais de nós são dispostas no local exacto das barreiras da opção, B_d e B_u . Com os novos *stretch parameters* a árvore trinomial é construída de acordo com as equações (14) e (17). Assim, o modelo trinomial pode ser aplicado para avaliar opções *double barrier*.

5.2 Avaliação de opções

A avaliação de opções no modelo trinomial é feita através do *backward recursive procedure*. Com base neste procedimento, começa-se por determinar o preço do contrato no final da árvore. Tal é possível uma vez que na data de vencimento da opção é conhecida a sua função *payoff* e esta depende somente dos valores do preço do activo subjacente na data de expiração. De seguida, vai-se percorrendo todos os nós da árvore em direcção à sua raíz. Assim chegamos ao valor da opção na data actual.

5.2.1 Opções Europeias standard

Consideremos, por exemplo, uma opção Europeia *standard call*. Na maturidade da opção, ou seja, em T , o seu valor é conhecido:

$$V_j^T = \max(0, S_j^T - X), \quad (23)$$

onde X é o preço de exercício, V_j^T representa o j -ésimo valor admissível para a *call* no período de tempo T e S_j^T é o j -ésimo valor admissível para o preço do activo em T .

Podemos determinar o valor esperado da opção no período de tempo anterior à maturidade, em $T - \Delta t$, bem como o preço do activo subjacente nesta mesma data, ou seja, $S_j^{T-\Delta t}$.

Sabendo que a probabilidade do activo subjacente $S_j^{T-\Delta t}$ se mover para S_{k+1}^T durante um período de tempo Δt é $p_1(j)$, que a probabilidade do mesmo se mover para S_k^T é $p_2(j)$ e, por último, que a probabilidade de se mover para S_{k-1}^T é $p_3(j)$, podemos usar a estratégia de avaliação neutra ao risco para calcular o valor da opção no período de tempo $T - \Delta t$ e para cada preço do activo subjacente:

$$V_j^{T-\Delta t} = e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^T + p_2(j)V_k^T + p_3(j)V_{k-1}^T]. \quad (24)$$

Repetindo este raciocínio para as datas $T - 2\Delta t$, $T - 3\Delta t$, ..., 2, 1 e 0, obtemos assim o valor da opção europeia *standard call* na data actual.

Para avaliar uma opção europeia *standard put* recorreremos ao procedimento descrito anteriormente, mas tendo em conta que o valor da opção no seu vencimento é dado pela expressão:

$$V_j^T = \max(0, X - S_j^T). \quad (25)$$

5.2.2 Opções Europeias com barreira

Single barrier As opções Europeias *single barrier* podem ser *knock-out* ou *knock-in*. Quando a barreira é inferior ao preço do activo no momento zero estamos perante uma opção *down*, caso contrário estamos perante uma opção *up*. Consideremos, por exemplo, uma opção Europeia *down-and-out call* com barreira inferior igual a B_d . O valor da *call* no seu vencimento, em cada um dos estados da natureza, é dado por:

$$V_j^T = \begin{cases} R, & \text{se } S_j^T \leq B_d \\ \max(0, S_j^T - X), & \text{se } S_j^T > B_d \end{cases} \quad (26)$$

sendo R o valor do rebate.

Nos instantes anteriores à maturidade, em $t < T$, o valor da opção é igual a:

$$V_j^t = \begin{cases} R, & \text{se } S_j^t \leq B_d \\ e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^{t+\Delta t} + p_2(j)V_k^{t+\Delta t} + p_3(j)V_{k-1}^{t+\Delta t}], & \text{se } S_j^t > B_d \end{cases} \quad (27)$$

Através do *backward recursive procedure* chegamos ao valor da opção europeia *down-and-out call* na data actual.

O valor de uma opção knock-in reside na possibilidade do preço do activo atingir a barreira; caso contrário, a opção expira sem ser exercida. A avaliação destas opções comporta, na realidade, duas avaliações: primeiro a avaliação de uma opção *standard* de natureza correspondente; e depois a avaliação de uma *single barrier*.

No caso, por exemplo, de uma opção Europeia *down-and-in call*, a parte da árvore abaixo da barreira desta opção deve ter o mesmo valor de uma opção europeia *standard call*. Portanto, em $t \leq T$, o seu valor é dado por:

$$V_j^t = W_j^t, \quad \text{para } S_j^t \leq B_d \quad (28)$$

onde W_j^t designa o j -ésimo valor de uma opção europeia *standard call* na data t .

Os valores da parte da árvore acima da barreira são determinados através da segunda avaliação, neste caso, de uma opção Europeia *down-and-in call*. Assim, na data de vencimento T e em cada um dos estados da natureza, o valor da opção é dado por:

$$V_j^T = R, \quad \text{para } S_j^T > B_d. \quad (29)$$

Por seu turno, nos instantes anteriores à maturidade, isto é em $t < T$, o valor da opção é dado por:

$$V_j^t = e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^{t+\Delta t} + p_2(j)V_k^{t+\Delta t} + p_3(j)V_{k-1}^{t+\Delta t}], \quad \text{para } S_j^t > B_d. \quad (30)$$

Percorrendo a árvore de trás para a frente chegamos ao valor da opção Europeia *down-and-in call* na data actual.

Double barrier As opções *double barrier*, como o nome indica, possuem duas barreiras: uma inferior e outra superior. Consideremos uma opção Europeia *double knock-out call* com barreira superior B_u e barreira inferior B_d . O valor da *call* no seu vencimento e em cada um dos estados da natureza é dado por:

$$V_j^T = \begin{cases} R, & \text{se } S_j^T \geq B_u \vee S_j^T \leq B_d \\ \max(0, S_j^T - X), & \text{se } B_d < S_j^T < B_u \end{cases} \quad (31)$$

Nos instantes anteriores à maturidade ($t < T$), o valor da opção é igual a:

$$V_j^t = \begin{cases} R, & \text{se } S_j^t \geq B_u \vee S_j^t \leq B_d \\ e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^{t+\Delta t} + p_2(j)V_k^{t+\Delta t} + p_3(j)V_{k-1}^{t+\Delta t}], & \text{se } B_d < S_j^t < B_u \end{cases} \quad (32)$$

Através do *backward recursive procedure* chegamos ao valor da opção Europeia *double knock-out call* na data actual.

No caso de uma opção Europeia *double knock-in call*, a parte da árvore abaixo da barreira inferior bem como a parte acima da barreira superior desta opção devem ter o mesmo valor de uma opção Europeia *standard call*. Portanto, em $t \leq T$, o seu valor é dado por:

$$V_j^t = W_j^t, \quad \text{quando } S_j^t \leq B_d \vee S_j^t \geq B_u. \quad (33)$$

Os valores da parte da árvore entre as barreiras são determinados através da segunda avaliação, neste caso, de uma opção Europeia *double knock-in call*. Assim na data de vencimento e em cada um dos estados da natureza, o valor da opção é dado por:

$$V_j^T = R, \quad \text{quando } B_d < S_j^T < B_u \quad (34)$$

Nos instantes anteriores à maturidade ($t < T$), o valor da opção é dado por:

$$V_j^t = e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^{t+\Delta t} + p_2(j)V_k^{t+\Delta t} + p_3(j)V_{k-1}^{t+\Delta t}], \quad \text{quando } B_d < S_j^t < B_u. \quad (35)$$

Percorrendo a árvore de trás para a frente chegamos ao valor da opção Europeia *double knock-in call* na data actual.

5.2.3 Opções Americanas

O método de avaliação de opções Americanas é similar ao das opções Europeias, bastando incorporar a possibilidade de exercício antecipado.

Standard options Consideremos uma opção americana *standard call*. Na maturidade da opção, ou seja, em T , o seu valor é dado por:

$$V_j^T = \max(0, S_j^T - X). \quad (36)$$

O valor esperado da opção no período de tempo $T - \Delta t$, tendo em conta o direito de exercício antecipado que uma opção americana oferece, é dado por:

$$V_j^{T-\Delta t} = \max(e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^T + p_2(j)V_k^T + p_3(j)V_{k-1}^T], S_j^{T-\Delta t} - X). \quad (37)$$

Repetindo este raciocínio para as datas $T - 2\Delta t$, $T - 3\Delta t$, ..., 2, 1 e 0, obtemos assim o valor da opção Americana *standard call* na data actual. O código em Matlab desta opção pode ser visto no Apêndice A.

Single Barrier Consideremos uma opção Americana *down-and-out call* com barreira inferior igual a B_d . O valor da *call* no seu vencimento e em cada um dos estados da natureza é dado por:

$$V_j^T = \begin{cases} R, & \text{se } S_j^T \leq B_d \\ \max(0, S_j^T - X), & \text{se } S_j^T > B_d \end{cases} \quad (38)$$

Nos instantes anteriores à maturidade ($t < T$), o valor da opção, tendo em conta o direito de exercício antecipado que uma opção Americana oferece, é dado por:

$$V_j^t = \begin{cases} R, & \text{se } S_j^t \leq B_d \\ \max(e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^{t+\Delta t} + p_2(j)V_k^{t+\Delta t} + p_3(j)V_{k-1}^{t+\Delta t}], S_j^t - X), & \text{se } S_j^t > B_d \end{cases} \quad (39)$$

Através do *backward recursive procedure* chegamos ao valor da opção Americana *down-and-out call* na data actual.

No caso de uma opção Americana *down-and-in call*, a parcela da árvore abaixo da barreira da opção deve ter o mesmo valor de uma opção Americana *standad call*. Portanto, em $t \leq T$, o seu valor é dado por:

$$V_j^t = W_j^t, \quad \text{para } S_j^t \leq B_d \quad (40)$$

Os valores na parcela da árvore acima da barreira são determinados através da segunda avaliação, neste caso, de uma opção Americana *down-and-in call*. Assim, na data de vencimento e em cada um dos estados da natureza, o valor da opção é dado por:

$$V_j^T = R, \quad \text{para } S_j^T > B_d. \quad (41)$$

Nos instantes anteriores à maturidade ($t < T$), o valor da opção, tendo em conta o direito de exercício antecipado que uma opção Americana oferece, é dado por:

$$V_j^t = \max(e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^{t+\Delta t} + p_2(j)V_k^{t+\Delta t} + p_3(j)V_{k-1}^{t+\Delta t}], S_j^t - X), \quad \text{para } S_j^t > B_d \quad (42)$$

Percorrendo a árvore de trás para a frente chegamos ao valor da opção Americana *down-and-in call* na data actual.

Double Barrier Consideremos uma opção Americana *double knock-out call* com barreira superior B_u e barreira inferior B_d . O valor da *call* no seu vencimento e em cada um dos estados da natureza é dado por:

$$V_j^T = \begin{cases} R, & \text{se } S_j^T \geq B_u \vee S_j^T \leq B_d \\ \max(0, S_j^T - X), & \text{se } B_d < S_j^T < B_u \end{cases} \quad (43)$$

Nos instantes anteriores à maturidade ($t < T$), o valor da opção, tendo em conta o direito de exercício antecipado que uma opção americana oferece, é igual a:

$$V_j^t = \begin{cases} R, & \text{se } S_j^t \geq B_u \vee S_j^t \leq B_d \\ \max(e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^{t+\Delta t} + p_2(j)V_k^{t+\Delta t} + p_3(j)V_{k-1}^{t+\Delta t}], S_j^t - X), & \text{se } B_d < S_j^t < B_u \end{cases} \quad (44)$$

Através do *backward recursive procedure* chegamos ao valor da opção Americana *double knock-out call* na data actual. O código em Matlab desta opção pode ser visto no Apêndice B.

No caso de uma opção Americana *double knock-in call*, a parte da grelha trinomial abaixo da barreira inferior bem como a parte acima da barreira superior da opção devem ter o mesmo valor de uma opção Americana *standard call*. Consequentemente, em $t \leq T$, o seu valor é dado por:

$$V_j^t = W_j^t, \quad \text{quando } S_j^t \leq B_d \vee S_j^t \geq B_u \quad (45)$$

Os valores na parcela da árvore entre as barreiras são determinados através da segunda avaliação, neste caso, de uma opção Americana *double knock-in call*. Assim, na data de vencimento e em cada um dos estados da natureza o valor da opção é dado por:

$$V_j^T = R, \quad \text{quando } B_d < S_j^T < B_u. \quad (46)$$

Nos instantes anteriores à maturidade ($t < T$), o valor da opção, tendo em conta o direito de exercício antecipado que uma opção Americana oferece, é dado por:

$$V_j^t = \max(e^{-r\Delta t}[p_1(j)V_{k+1}^{t+\Delta t} + p_2(j)V_k^{t+\Delta t} + p_3(j)V_{k-1}^{t+\Delta t}], S_j^t - X), \quad (47)$$

quando $B_d < S_j^t < B_u$. Percorrendo a árvore, de trás para a frente, chegamos ao valor da opção americana *double knock-in call* na data actual. O código em Matlab desta opção pode ser visto no Apêndice C.

6 Resultados numéricos

As características de imediato referidas estão presentes em todas as opções consideradas nas Tabelas 1 a 10: O preço do activo na data actual, S_0 , é 100. O prazo de vencimento das opções é de seis meses, a taxa de juro sem risco anual é de 10% e a volatilidade instantânea é igual a 25% por ano. São usados sete valores para α com o intuito de mostrar o seu efeito sobre os preços das opções, três deles representando o modelo absoluto ($\alpha=0$), o modelo de raiz quadrada ($\alpha=1$) e o modelo lognormal ($\alpha=2$). Na avaliação de opções barreira para o modelo lognormal, quando $\alpha = 2$, é utilizado o método trinomial desenvolvido por Ritchken (1995). O número de períodos de tempo considerado para todas as opções é de 1000.

De modo a assegurar que os preços das opções para diferentes valores de α são comparáveis entre si, o valor de σ tem de ser ajustado a cada modelo. Sendo σ_{BS} a volatilidade instantânea relativa ao modelo lognormal ($\alpha = 2$), o valor de σ é ajustado tal que a volatilidade instantânea inicial seja igual para os diferentes modelos. De acordo com MacBeth and Merville (1980), o valor do σ a ser usado para modelos com outros parâmetros de α é dado pela equação:

$$\sigma = (\sigma_{BS})S_0^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (48)$$

No processo de avaliação das opções devem ser atribuídos valores apropriados às duas constantes utilizadas no método trinomial, λ e v . Em conformidade com Boyle (1986), Boyle (1988), e Kamrad and Ritchken (1991), foi decidido usar $\lambda = \sqrt{1,5}$.

Apesar do valor de v não ter impacto sobre a precisão do modelo, revela ser uma constante importante. Quando $\alpha > 2$ podemos ver pela equação (8) que a árvore apresenta valores de y positivos desde que v seja negativo. Por isso, para valores de $\alpha \leq 2$ é assumido $v = \sigma$, caso contrário, $v = -\sigma$. A extensão do algoritmo de Boyle

and Tian (1999) para $\alpha > 2$ constitui um importante contributo da presente tese.

Para o processo CEV, todos os resultados foram obtidos utilizando o modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999). As primeiras quatro tabelas apresentam os preços das opções Europeias e Americanas de compra e venda, *standard*, *down-and-out*, *up-and-out* e *double knock-out*. As Tabelas 5, 6, 7 e 8 contêm os preços das opções Europeias e Americanas de compra e venda, *standard*, *down-and-in*, *up-and-in* e *double knock-in*. As duas últimas tabelas apresentam os preços das opções Europeias e Americanas *call*, *standard*, *down-and-out*, *up-and-out* e *double knock-out*, considerando uma *dividend yield* de 9%.

A Tabela 1 (*knock-out*) levou 8h38m33s a ser calculada enquanto que a Tabela 5 (*knock-in*) demorou mais tempo, no total 12h23m4s. A diferença no tempo de processamento deve-se ao facto do algoritmo das opções *knock-in* executar duas funções de avaliação, como explicado na Secção 5.2. Os tempos apresentados foram obtidos num computador com processador i3 a 64bits com 1.33GHz de frequência de relógio com 2 núcleos e 4 *threads* com 4 Gb de memória RAM.

Tabela 1: Knock-Out European Call

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|--------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard European Call | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 12,7431 | 12,7026 | 12,6635 | 12,6255 | 12,5886 | 12,5527 | 12,5179 |
| inf | 0 | 100 | 9,5910 | 9,5869 | 9,5840 | 9,5822 | 9,5816 | 9,5821 | 9,5838 |
| inf | 0 | 105 | 6,9408 | 6,9783 | 7,0172 | 7,0576 | 7,0994 | 7,1428 | 7,1878 |
| Down-and-out European Call | | | | | | | | | |
| inf | 90 | 95 | 10,5733 | 10,5874 | 10,6017 | 10,6163 | 10,6312 | 10,6464 | 10,6618 |
| inf | 90 | 100 | 8,2413 | 8,2725 | 8,3043 | 8,3368 | 8,3698 | 8,4038 | 8,4382 |
| inf | 90 | 105 | 6,1447 | 6,1998 | 6,2560 | 6,3133 | 6,3722 | 6,4333 | 6,4951 |
| inf | 95 | 95 | 6,9982 | 6,9884 | 6,9785 | 6,9685 | 6,9583 | 6,9479 | 6,9374 |
| inf | 95 | 100 | 5,6288 | 5,6392 | 5,6498 | 5,6607 | 5,6719 | 5,6836 | 5,6955 |
| inf | 95 | 105 | 4,3329 | 4,3649 | 4,3977 | 4,4313 | 4,4657 | 4,5011 | 4,5373 |
| Up-and-out European Call | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 3,4424 | 3,2851 | 3,1358 | 2,9943 | 2,8605 | 2,7339 | 2,6143 |
| 120 | 0 | 100 | 1,9350 | 1,8262 | 1,7233 | 1,6262 | 1,5348 | 1,4487 | 1,3676 |
| 120 | 0 | 105 | 0,8891 | 0,8289 | 0,7721 | 0,7189 | 0,6699 | 0,6234 | 0,5806 |
| 140 | 0 | 95 | 10,6226 | 10,2249 | 9,8116 | 9,3871 | 8,9568 | 8,5252 | 8,0964 |
| 140 | 0 | 100 | 7,6983 | 7,3748 | 7,0372 | 6,6897 | 6,3369 | 5,9829 | 5,6314 |
| 140 | 0 | 105 | 5,2757 | 5,0318 | 4,7756 | 4,5105 | 4,2413 | 3,9710 | 3,7030 |
| Double Knock-Out European Call | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 2,0771 | 1,9745 | 1,8778 | 1,7868 | 1,7013 | 1,6211 | 1,5461 |
| 120 | 90 | 100 | 1,2360 | 1,1626 | 1,0936 | 1,0288 | 0,9683 | 0,9116 | 0,8586 |
| 120 | 90 | 105 | 0,5933 | 0,5510 | 0,5114 | 0,4746 | 0,4407 | 0,4089 | 0,3797 |
| 140 | 95 | 95 | 5,2922 | 5,0141 | 4,7274 | 4,4361 | 4,1442 | 3,8548 | 3,5714 |
| 140 | 95 | 100 | 4,1057 | 3,8760 | 3,6389 | 3,3980 | 3,1567 | 2,9180 | 2,6848 |
| 140 | 95 | 105 | 2,9928 | 2,8130 | 2,6271 | 2,4379 | 2,2488 | 2,0622 | 1,8807 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Europeias *standard* e *knock-out call*. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Europeias *standard* e *knock-out call* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 2: Knock-Out European Put

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|-------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard European Put | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 3,1100 | 3,0696 | 3,0304 | 2,9924 | 2,9555 | 2,9196 | 2,8848 |
| inf | 0 | 100 | 4,7141 | 4,7100 | 4,7071 | 4,7053 | 4,7047 | 4,7052 | 4,7069 |
| inf | 0 | 105 | 6,8200 | 6,8575 | 6,8964 | 6,9368 | 6,9786 | 7,0220 | 7,0670 |
| Down-and-out European Put | | | | | | | | | |
| inf | 90 | 95 | 0,0200 | 0,0214 | 0,0230 | 0,0246 | 0,0264 | 0,0284 | 0,0305 |
| inf | 90 | 100 | 0,1609 | 0,1703 | 0,1803 | 0,1909 | 0,2023 | 0,2146 | 0,2276 |
| inf | 90 | 105 | 0,5370 | 0,5611 | 0,5866 | 0,6133 | 0,6420 | 0,6730 | 0,7051 |
| inf | 95 | 95 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| inf | 95 | 100 | 0,0119 | 0,0124 | 0,0128 | 0,0133 | 0,0138 | 0,0145 | 0,0150 |
| inf | 95 | 105 | 0,0973 | 0,0998 | 0,1024 | 0,1051 | 0,1079 | 0,1108 | 0,1138 |
| Up-and-out European Put | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 3,0881 | 3,0441 | 3,0008 | 2,9582 | 2,9163 | 2,8751 | 2,8343 |
| 120 | 0 | 100 | 4,6597 | 4,6464 | 4,6330 | 4,6197 | 4,6063 | 4,5928 | 4,5790 |
| 120 | 0 | 105 | 6,6928 | 6,7104 | 6,7267 | 6,7420 | 6,7571 | 6,7705 | 6,7833 |
| 140 | 0 | 95 | 3,1099 | 3,0696 | 3,0304 | 2,9923 | 2,9554 | 2,9195 | 2,8846 |
| 140 | 0 | 100 | 4,7141 | 4,7100 | 4,7070 | 4,7052 | 4,7044 | 4,7047 | 4,7060 |
| 140 | 0 | 105 | 6,8198 | 6,8574 | 6,8964 | 6,9362 | 6,9777 | 7,0204 | 7,0641 |
| Double Knock-Out European Put | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 0,0179 | 0,0189 | 0,0200 | 0,0211 | 0,0223 | 0,0236 | 0,0250 |
| 120 | 90 | 100 | 0,1421 | 0,1482 | 0,1546 | 0,1612 | 0,1681 | 0,1753 | 0,1828 |
| 120 | 90 | 105 | 0,4646 | 0,4779 | 0,4914 | 0,5050 | 0,5194 | 0,5339 | 0,5491 |
| 140 | 95 | 95 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 140 | 95 | 100 | 0,0119 | 0,0124 | 0,0128 | 0,0133 | 0,0138 | 0,0144 | 0,0149 |
| 140 | 95 | 105 | 0,0975 | 0,0999 | 0,1023 | 0,1047 | 0,1072 | 0,1098 | 0,1122 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Europeias *standard* e *knock-out put*. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Europeias *standard* e *knock-out put* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 3: Knock-Out American Call

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|--------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard American Call | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 12,7431 | 12,7026 | 12,6635 | 12,6255 | 12,5886 | 12,5527 | 12,5179 |
| inf | 0 | 100 | 9,5910 | 9,5869 | 9,5840 | 9,5822 | 9,5816 | 9,5821 | 9,5838 |
| inf | 0 | 105 | 6,9408 | 6,9783 | 7,0172 | 7,0576 | 7,0994 | 7,1428 | 7,1878 |
| Down-and-out American Call | | | | | | | | | |
| inf | 90 | 95 | 10,5733 | 10,5874 | 10,6017 | 10,6163 | 10,6312 | 10,6464 | 10,6618 |
| inf | 90 | 100 | 8,2413 | 8,2725 | 8,3043 | 8,3368 | 8,3698 | 8,4038 | 8,4382 |
| inf | 90 | 105 | 6,1447 | 6,1998 | 6,2560 | 6,3133 | 6,3722 | 6,4333 | 6,4951 |
| inf | 95 | 95 | 6,9982 | 6,9884 | 6,9785 | 6,9685 | 6,9583 | 6,9479 | 6,9374 |
| inf | 95 | 100 | 5,6288 | 5,6392 | 5,6498 | 5,6607 | 5,6719 | 5,6836 | 5,6955 |
| inf | 95 | 105 | 4,3329 | 4,3649 | 4,3977 | 4,4313 | 4,4657 | 4,5011 | 4,5373 |
| Up-and-out American Call | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 11,9513 | 11,8869 | 11,8211 | 11,7563 | 11,6954 | 11,6326 | 11,5705 |
| 120 | 0 | 100 | 8,7191 | 8,6833 | 8,6451 | 8,6069 | 8,5724 | 8,5345 | 8,4963 |
| 120 | 0 | 105 | 5,9408 | 5,9334 | 5,9214 | 5,9084 | 5,8996 | 5,8847 | 5,8689 |
| 140 | 0 | 95 | 12,6894 | 12,6370 | 12,5843 | 12,5311 | 12,4780 | 12,4248 | 12,3715 |
| 140 | 0 | 100 | 9,5347 | 9,5178 | 9,5006 | 9,4828 | 9,4650 | 9,4470 | 9,4289 |
| 140 | 0 | 105 | 6,8814 | 6,9056 | 6,9296 | 6,9526 | 6,9761 | 6,9994 | 7,0225 |
| Double Knock-Out American Call | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 9,8235 | 9,8144 | 9,8035 | 9,7926 | 9,7845 | 9,7740 | 9,7635 |
| 120 | 90 | 100 | 7,4107 | 7,4109 | 7,4083 | 7,4053 | 7,4051 | 7,4013 | 7,3969 |
| 120 | 90 | 105 | 5,1899 | 5,2008 | 5,2075 | 5,2130 | 5,2221 | 5,2256 | 5,2279 |
| 140 | 95 | 95 | 6,9526 | 6,9328 | 6,9118 | 6,8895 | 6,8663 | 6,8423 | 6,8172 |
| 140 | 95 | 100 | 5,5808 | 5,5806 | 5,5795 | 5,5775 | 5,5748 | 5,5718 | 5,5679 |
| 140 | 95 | 105 | 4,2827 | 4,3036 | 4,3239 | 4,3434 | 4,3628 | 4,3821 | 4,4007 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Americanas *standard* e *knock-out call*. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Americanas *standard* e *knock-out call* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 4: Knock-Out American Put

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|-------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard American Put | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 3,3552 | 3,3232 | 3,2922 | 3,2621 | 3,2329 | 3,2045 | 3,1769 |
| inf | 0 | 100 | 5,1793 | 5,1888 | 5,1992 | 5,2105 | 5,2226 | 5,2357 | 5,2497 |
| inf | 0 | 105 | 7,6645 | 7,7159 | 7,7684 | 7,8220 | 7,8768 | 7,9329 | 7,9904 |
| Down-and-out American Put | | | | | | | | | |
| inf | 90 | 95 | 2,1747 | 2,1882 | 2,2017 | 2,2152 | 2,2286 | 2,2547 | 2,2678 |
| inf | 90 | 100 | 4,7855 | 4,8155 | 4,8458 | 4,8765 | 4,9076 | 4,9452 | 4,9769 |
| inf | 90 | 105 | 7,6288 | 7,6824 | 7,7370 | 7,7925 | 7,8493 | 7,9093 | 7,9686 |
| inf | 95 | 95 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| inf | 95 | 100 | 3,1823 | 3,2015 | 3,2211 | 3,2410 | 3,2614 | 3,3289 | 3,3504 |
| inf | 95 | 105 | 6,9505 | 6,9899 | 7,0301 | 7,0711 | 7,1131 | 7,1826 | 7,2271 |
| Up-and-out American Put | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 3,3326 | 3,2969 | 3,2616 | 3,2267 | 3,1923 | 3,1581 | 3,1243 |
| 120 | 0 | 100 | 5,1230 | 5,1228 | 5,1223 | 5,1214 | 5,1203 | 5,1186 | 5,1163 |
| 120 | 0 | 105 | 7,5338 | 7,5645 | 7,5938 | 7,6217 | 7,6488 | 7,6741 | 7,6982 |
| 140 | 0 | 95 | 3,3551 | 3,3232 | 3,2922 | 3,2620 | 3,2328 | 3,2043 | 3,1766 |
| 140 | 0 | 100 | 5,1792 | 5,1888 | 5,1992 | 5,2103 | 5,2224 | 5,2352 | 5,2489 |
| 140 | 0 | 105 | 7,6644 | 7,7159 | 7,7683 | 7,8215 | 7,8759 | 7,9313 | 7,9875 |
| Double Knock-Out American Put | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 2,1557 | 2,1659 | 2,1757 | 2,1849 | 2,1937 | 2,2145 | 2,2220 |
| 120 | 90 | 100 | 4,7312 | 4,7518 | 4,7716 | 4,7905 | 4,8086 | 4,8316 | 4,8476 |
| 120 | 90 | 105 | 7,5013 | 7,5345 | 7,5663 | 7,5968 | 7,6263 | 7,6552 | 7,6816 |
| 140 | 95 | 95 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 140 | 95 | 100 | 3,1823 | 3,2015 | 3,2210 | 3,2410 | 3,2612 | 3,3285 | 3,3497 |
| 140 | 95 | 105 | 6,9507 | 6,9900 | 7,0300 | 7,0707 | 7,1123 | 7,1810 | 7,2244 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Americanas *standard* e *knock-out put*. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Americanas *standard* e *knock-out put* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 5: Knock-In European Call

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|-------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard European Call | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 12,7431 | 12,7026 | 12,6635 | 12,6255 | 12,5886 | 12,5527 | 12,5179 |
| inf | 0 | 100 | 9,5910 | 9,5869 | 9,5840 | 9,5822 | 9,5816 | 9,5821 | 9,5838 |
| inf | 0 | 105 | 6,9408 | 6,9783 | 7,0172 | 7,0576 | 7,0994 | 7,1428 | 7,1878 |
| Down-and-in European Call | | | | | | | | | |
| inf | 35 | 45 | 2,1700 | 2,1154 | 2,0617 | 2,0091 | 1,9572 | 1,9061 | 1,8559 |
| inf | 90 | 100 | 1,3498 | 1,3144 | 1,2797 | 1,2454 | 1,2117 | 1,1785 | 1,1456 |
| inf | 90 | 105 | 0,7963 | 0,7787 | 0,7613 | 0,7439 | 0,7268 | 0,7101 | 0,6931 |
| inf | 95 | 95 | 5,7439 | 5,7131 | 5,6838 | 5,6558 | 5,6290 | 5,6039 | 5,5795 |
| inf | 95 | 100 | 3,9621 | 3,9476 | 3,9341 | 3,9214 | 3,9095 | 3,8987 | 3,8885 |
| inf | 95 | 105 | 2,6067 | 2,6127 | 2,6193 | 2,6264 | 2,6342 | 2,6426 | 2,6516 |
| Up-and-in European Call | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 9,3006 | 9,4176 | 9,5277 | 9,6311 | 9,7280 | 9,8188 | 9,9036 |
| 120 | 0 | 100 | 7,6560 | 7,7608 | 7,8608 | 7,9560 | 8,0468 | 8,1334 | 8,2161 |
| 120 | 0 | 105 | 6,0516 | 6,1496 | 6,2451 | 6,3384 | 6,4298 | 6,5193 | 6,6074 |
| 140 | 0 | 95 | 2,1204 | 2,4777 | 2,8520 | 3,2383 | 3,6317 | 4,0276 | 4,4215 |
| 140 | 0 | 100 | 1,8927 | 2,2121 | 2,5468 | 2,8925 | 3,2447 | 3,5993 | 3,9524 |
| 140 | 0 | 105 | 1,6650 | 1,9465 | 2,2418 | 2,5469 | 2,8580 | 3,1717 | 3,4846 |
| Double Knock-In European Call | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 10,6661 | 10,7283 | 10,7857 | 10,8386 | 10,8872 | 10,9314 | 10,9716 |
| 120 | 90 | 100 | 8,3551 | 8,4244 | 8,4905 | 8,5534 | 8,6134 | 8,6705 | 8,7251 |
| 120 | 90 | 105 | 6,3474 | 6,4275 | 6,5058 | 6,5827 | 6,6590 | 6,7338 | 6,8082 |
| 140 | 95 | 95 | 7,4499 | 7,6876 | 7,9350 | 8,1882 | 8,4433 | 8,6969 | 8,9455 |
| 140 | 95 | 100 | 5,4853 | 5,7110 | 5,9451 | 6,1842 | 6,4249 | 6,6641 | 6,8990 |
| 140 | 95 | 105 | 3,9478 | 4,1653 | 4,3903 | 4,6195 | 4,8505 | 5,0804 | 5,3069 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Europeias *standard* e *knock-in call*. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Europeias *standard* e *knock-in call* para cada parâmetro α , sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 6: Knock-In European Put

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard European Put | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 3,1100 | 3,0696 | 3,0304 | 2,9924 | 2,9555 | 2,9196 | 2,8848 |
| inf | 0 | 100 | 4,7141 | 4,7100 | 4,7071 | 4,7053 | 4,7047 | 4,7052 | 4,7069 |
| inf | 0 | 105 | 6,8200 | 6,8575 | 6,8964 | 6,9368 | 6,9786 | 7,0220 | 7,0670 |
| Down-and-in European Call | | | | | | | | | |
| inf | 35 | 45 | 3,0902 | 3,0482 | 3,0074 | 2,9676 | 2,9289 | 2,8911 | 2,8542 |
| inf | 90 | 100 | 4,5533 | 4,5398 | 4,5268 | 4,5143 | 4,5023 | 4,4907 | 4,4793 |
| inf | 90 | 105 | 6,2831 | 6,2965 | 6,3099 | 6,3231 | 6,3363 | 6,3496 | 6,3623 |
| inf | 95 | 95 | 3,1090 | 3,0685 | 3,0292 | 2,9912 | 2,9542 | 2,9187 | 2,8839 |
| inf | 95 | 100 | 4,7021 | 4,6975 | 4,6941 | 4,6918 | 4,6906 | 4,6909 | 4,6920 |
| inf | 95 | 105 | 6,7215 | 6,7571 | 6,7938 | 6,8319 | 6,8713 | 6,9121 | 6,9543 |
| Up-and-in European Put | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 0,0218 | 0,0255 | 0,0296 | 0,0342 | 0,0391 | 0,0446 | 0,0505 |
| 120 | 0 | 100 | 0,0543 | 0,0637 | 0,0741 | 0,0856 | 0,0984 | 0,1124 | 0,1278 |
| 120 | 0 | 105 | 0,1270 | 0,1474 | 0,1698 | 0,1945 | 0,2219 | 0,2515 | 0,2839 |
| 140 | 0 | 95 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 |
| 140 | 0 | 100 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0008 |
| 140 | 0 | 105 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0008 | 0,0015 | 0,0027 |
| Double Knock-In European Put | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 3,0923 | 3,0508 | 3,0104 | 2,9712 | 2,9331 | 2,8958 | 2,8596 |
| 120 | 90 | 100 | 4,5720 | 4,5618 | 4,5525 | 4,5440 | 4,5366 | 4,5299 | 4,5240 |
| 120 | 90 | 105 | 6,3552 | 6,3798 | 6,4051 | 6,4315 | 6,4596 | 6,4880 | 6,5180 |
| 140 | 95 | 95 | 3,1091 | 3,0686 | 3,0294 | 2,9913 | 2,9544 | 2,9186 | 2,8837 |
| 140 | 95 | 100 | 4,7022 | 4,6976 | 4,6943 | 4,6920 | 4,6909 | 4,6908 | 4,6920 |
| 140 | 95 | 105 | 6,7223 | 6,7576 | 6,7942 | 6,8319 | 6,8713 | 6,9121 | 6,9546 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Europeias *standard* e *knock-in put*. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Europeias *standard* e *knock-in put* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 7: Knock-In American Call

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|-------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard American Call | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 12,7431 | 12,7026 | 12,6635 | 12,6255 | 12,5886 | 12,5527 | 12,5179 |
| inf | 0 | 100 | 9,5910 | 9,5869 | 9,5840 | 9,5822 | 9,5816 | 9,5821 | 9,5838 |
| inf | 0 | 105 | 6,9408 | 6,9783 | 7,0172 | 7,0576 | 7,0994 | 7,1428 | 7,1878 |
| Down-and-in American Call | | | | | | | | | |
| inf | 35 | 45 | 2,1700 | 2,1154 | 2,0617 | 2,0091 | 1,9572 | 1,9061 | 1,8559 |
| inf | 90 | 100 | 1,3498 | 1,3144 | 1,2797 | 1,2454 | 1,2117 | 1,1785 | 1,1456 |
| inf | 90 | 105 | 0,7963 | 0,7787 | 0,7613 | 0,7439 | 0,7268 | 0,7101 | 0,6931 |
| inf | 95 | 95 | 5,7439 | 5,7131 | 5,6838 | 5,6558 | 5,6290 | 5,6039 | 5,5795 |
| inf | 95 | 100 | 3,9621 | 3,9476 | 3,9341 | 3,9214 | 3,9095 | 3,8987 | 3,8885 |
| inf | 95 | 105 | 2,6067 | 2,6127 | 2,6193 | 2,6264 | 2,6342 | 2,6426 | 2,6516 |
| Up-and-in American Call | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 9,3006 | 9,4176 | 9,5277 | 9,6311 | 9,7280 | 9,8188 | 9,9036 |
| 120 | 0 | 100 | 7,6560 | 7,7608 | 7,8608 | 7,9560 | 8,0468 | 8,1334 | 8,2161 |
| 120 | 0 | 105 | 6,0516 | 6,1496 | 6,2451 | 6,3384 | 6,4298 | 6,5193 | 6,6074 |
| 140 | 0 | 95 | 2,1204 | 2,4777 | 2,8520 | 3,2383 | 3,6317 | 4,0276 | 4,4215 |
| 140 | 0 | 100 | 1,8927 | 2,2121 | 2,5468 | 2,8925 | 3,2447 | 3,5993 | 3,9524 |
| 140 | 0 | 105 | 1,6650 | 1,9465 | 2,2418 | 2,5469 | 2,8580 | 3,1717 | 3,4846 |
| Double Knock-In American Call | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 10,6661 | 10,7283 | 10,7857 | 10,8386 | 10,8872 | 10,9314 | 10,9716 |
| 120 | 90 | 100 | 8,3551 | 8,4244 | 8,4905 | 8,5534 | 8,6134 | 8,6705 | 8,7251 |
| 120 | 90 | 105 | 6,3474 | 6,4275 | 6,5058 | 6,5827 | 6,6590 | 6,7338 | 6,8082 |
| 140 | 95 | 95 | 7,4499 | 7,6876 | 7,9350 | 8,1882 | 8,4433 | 8,6969 | 8,9455 |
| 140 | 95 | 100 | 5,4853 | 5,7110 | 5,9451 | 6,1842 | 6,4249 | 6,6641 | 6,8990 |
| 140 | 95 | 105 | 3,9478 | 4,1653 | 4,3903 | 4,6195 | 4,8505 | 5,0804 | 5,3069 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Americanas *standard* e *knock-in call*. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Americanas *standard* e *knock-in call* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 8: Knock-In American Put

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard American Put | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 3,3552 | 3,3232 | 3,2922 | 3,2621 | 3,2329 | 3,2045 | 3,1769 |
| inf | 0 | 100 | 5,1793 | 5,1888 | 5,1992 | 5,2105 | 5,2226 | 5,2357 | 5,2497 |
| inf | 0 | 105 | 7,6645 | 7,7159 | 7,7684 | 7,8220 | 7,8768 | 7,9329 | 7,9904 |
| Down-and-in American Put | | | | | | | | | |
| inf | 35 | 45 | 3,3352 | 3,3017 | 3,2690 | 3,2371 | 3,2060 | 3,1757 | 3,1460 |
| inf | 90 | 100 | 5,0144 | 5,0141 | 5,0140 | 5,0141 | 5,0143 | 5,0148 | 5,0151 |
| inf | 90 | 105 | 7,0938 | 7,1192 | 7,1441 | 7,1684 | 7,1922 | 7,2154 | 7,2378 |
| inf | 95 | 95 | 3,3545 | 3,3225 | 3,2914 | 3,2613 | 3,2320 | 3,2040 | 3,1764 |
| inf | 95 | 100 | 5,1671 | 5,1761 | 5,1860 | 5,1968 | 5,2084 | 5,2213 | 5,2347 |
| inf | 95 | 105 | 7,5640 | 7,6130 | 7,6631 | 7,7141 | 7,7662 | 7,8198 | 7,8743 |
| Up-and-in American Put | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 0,0225 | 0,0264 | 0,0306 | 0,0354 | 0,0406 | 0,0463 | 0,0526 |
| 120 | 0 | 100 | 0,0563 | 0,0661 | 0,0770 | 0,0891 | 0,1025 | 0,1173 | 0,1335 |
| 120 | 0 | 105 | 0,1325 | 0,1539 | 0,1775 | 0,2035 | 0,2322 | 0,2635 | 0,2976 |
| 140 | 0 | 95 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 |
| 140 | 0 | 100 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0009 |
| 140 | 0 | 105 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0008 | 0,0016 | 0,0028 |
| Double Knock-In American Put | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 3,3373 | 3,3042 | 3,2720 | 3,2407 | 3,2103 | 3,1805 | 3,1515 |
| 120 | 90 | 100 | 5,0336 | 5,0367 | 5,0403 | 5,0446 | 5,0495 | 5,0550 | 5,0610 |
| 120 | 90 | 105 | 7,1688 | 7,2058 | 7,2432 | 7,2813 | 7,3204 | 7,3599 | 7,4003 |
| 140 | 95 | 95 | 3,3546 | 3,3226 | 3,2915 | 3,2614 | 3,2322 | 3,2038 | 3,1762 |
| 140 | 95 | 100 | 5,1672 | 5,1763 | 5,1862 | 5,1970 | 5,2086 | 5,2212 | 5,2347 |
| 140 | 95 | 105 | 7,5643 | 7,6133 | 7,6634 | 7,7144 | 7,7667 | 7,8202 | 7,8751 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Americanas *standard* e *knock-in put*. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Americanas *standard* e *knock-in put* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 9: Knock-Out European Call com $q=9\%$

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|--------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard European Call | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 9,6637 | 9,6194 | 9,5765 | 9,5349 | 9,4945 | 9,4552 | 9,4171 |
| inf | 0 | 100 | 6,9659 | 6,9620 | 6,9593 | 6,9577 | 6,9571 | 6,9576 | 6,9592 |
| inf | 0 | 105 | 4,8017 | 4,8380 | 4,8755 | 4,9141 | 4,9539 | 4,9950 | 5,0373 |
| Down-and-out European Call | | | | | | | | | |
| inf | 35 | 45 | 7,7759 | 7,7878 | 7,7998 | 7,8118 | 7,8239 | 7,8361 | 7,8484 |
| inf | 90 | 100 | 5,8557 | 5,8850 | 5,9147 | 5,9449 | 5,9756 | 6,0070 | 6,0387 |
| inf | 90 | 105 | 4,1853 | 4,2363 | 4,2881 | 4,3408 | 4,3948 | 4,4506 | 4,5068 |
| inf | 95 | 95 | 4,9533 | 4,9525 | 4,9516 | 4,9507 | 4,9498 | 4,9489 | 4,9480 |
| inf | 95 | 100 | 3,8768 | 3,8926 | 3,9087 | 3,9252 | 3,9421 | 3,9594 | 3,9771 |
| inf | 95 | 105 | 2,8779 | 2,9112 | 2,9450 | 2,9797 | 3,0151 | 3,0514 | 3,0885 |
| Up-and-out European Call | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 3,2241 | 3,0591 | 2,9025 | 2,7545 | 2,6147 | 2,4829 | 2,3585 |
| 120 | 0 | 100 | 1,7567 | 1,6485 | 1,5464 | 1,4504 | 1,3603 | 1,2757 | 1,1963 |
| 120 | 0 | 105 | 0,7799 | 0,7236 | 0,6706 | 0,6209 | 0,5754 | 0,5324 | 0,4928 |
| 140 | 0 | 95 | 8,5693 | 8,2804 | 7,9718 | 7,6474 | 7,3116 | 6,9686 | 6,6226 |
| 140 | 0 | 100 | 5,9927 | 5,7712 | 5,5322 | 5,2790 | 5,0156 | 4,7457 | 4,4730 |
| 140 | 0 | 105 | 3,9496 | 3,7954 | 3,6260 | 3,4439 | 3,2532 | 3,0569 | 2,8581 |
| Double Knock-Out European Call | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 1,9252 | 1,8198 | 1,7204 | 1,6270 | 1,5394 | 1,4572 | 1,3804 |
| 120 | 90 | 100 | 1,1172 | 1,0449 | 0,9771 | 0,9136 | 0,8544 | 0,7990 | 0,7475 |
| 120 | 90 | 105 | 0,5199 | 0,4805 | 0,4436 | 0,4093 | 0,3779 | 0,3485 | 0,3216 |
| 140 | 95 | 95 | 4,0749 | 3,8882 | 3,6886 | 3,4794 | 3,2641 | 3,0458 | 2,8282 |
| 140 | 95 | 100 | 3,0956 | 2,9461 | 2,7855 | 2,6166 | 2,4426 | 2,2663 | 2,0909 |
| 140 | 95 | 105 | 2,1943 | 2,0826 | 1,9615 | 1,8334 | 1,7013 | 1,5675 | 1,4346 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Europeias *standard* e *knock-out call* considerando uma *dividend yield* igual a 9%. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Europeias *standard* e *knock-out call* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

Tabela 10: Knock-Out American Call com $q=9\%$

| B_u | B_d | X | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 2,5$ | $\alpha = 3$ |
|--------------------------------|-------|-----|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| Standard American Call | | | | | | | | | |
| inf | 0 | 95 | 9,7254 | 9,6819 | 9,6397 | 9,5988 | 9,5592 | 9,5207 | 9,4833 |
| inf | 0 | 100 | 6,9986 | 6,9956 | 6,9938 | 6,9930 | 6,9934 | 6,9948 | 6,9974 |
| inf | 0 | 105 | 4,8180 | 4,8552 | 4,8936 | 4,9331 | 4,9739 | 5,0159 | 5,0593 |
| Down-and-out American Call | | | | | | | | | |
| inf | 35 | 45 | 7,8341 | 7,8468 | 7,8596 | 7,8724 | 7,8854 | 7,8985 | 7,9117 |
| inf | 90 | 100 | 5,8866 | 5,9168 | 5,9474 | 5,9786 | 6,0102 | 6,0425 | 6,0752 |
| inf | 90 | 105 | 4,2010 | 4,2528 | 4,3054 | 4,3591 | 4,4140 | 4,4708 | 4,5280 |
| inf | 95 | 95 | 5,0279 | 5,0280 | 5,0282 | 5,0284 | 5,0285 | 5,0287 | 5,0289 |
| inf | 95 | 100 | 3,9012 | 3,9177 | 3,9346 | 3,9518 | 3,9694 | 3,9875 | 4,0060 |
| inf | 95 | 105 | 2,8905 | 2,9244 | 2,9590 | 2,9943 | 3,0305 | 3,0676 | 3,1055 |
| Up-and-out American Call | | | | | | | | | |
| 120 | 0 | 95 | 9,7076 | 9,6602 | 9,6129 | 9,5663 | 9,5207 | 9,4752 | 9,4299 |
| 120 | 0 | 100 | 6,9284 | 6,9132 | 6,8970 | 6,8803 | 6,8642 | 6,8464 | 6,8278 |
| 120 | 0 | 105 | 4,6347 | 4,6462 | 4,6543 | 4,6607 | 4,6683 | 4,6713 | 4,6730 |
| 140 | 0 | 95 | 9,7253 | 9,6819 | 9,6397 | 9,5988 | 9,5592 | 9,5207 | 9,4834 |
| 140 | 0 | 100 | 6,9986 | 6,9956 | 6,9938 | 6,9930 | 6,9934 | 6,9948 | 6,9974 |
| 140 | 0 | 105 | 4,8179 | 4,8553 | 4,8938 | 4,9330 | 4,9737 | 5,0155 | 5,0582 |
| Double Knock-Out American Call | | | | | | | | | |
| 120 | 90 | 95 | 7,8216 | 7,8310 | 7,8398 | 7,8480 | 7,8560 | 7,8632 | 7,8697 |
| 120 | 90 | 100 | 5,8198 | 5,8384 | 5,8553 | 5,8712 | 5,8871 | 5,9009 | 5,9134 |
| 120 | 90 | 105 | 4,0239 | 4,0506 | 4,0743 | 4,0962 | 4,1189 | 4,1375 | 4,1544 |
| 140 | 95 | 95 | 5,0279 | 5,0280 | 5,0282 | 5,0283 | 5,0285 | 5,0287 | 5,0289 |
| 140 | 95 | 100 | 3,9012 | 3,9177 | 3,9346 | 3,9518 | 3,9694 | 3,9875 | 4,0060 |
| 140 | 95 | 105 | 2,8908 | 2,9245 | 2,9590 | 2,9942 | 3,0302 | 3,0671 | 3,1044 |

Esta tabela apresenta os valores das opções Americanas *standard* e *knock-out call* considerando uma *dividend yield* igual a 9%. Estes preços são baseados no modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) usando 1000 períodos de tempo. As primeiras duas colunas indicam as barreiras superior e inferior de cada contrato, respectivamente. Logo a seguir, a terceira coluna mostra o preço de exercício. As últimas sete colunas contêm os valores das opções Americanas *standard* e *knock-out call* para cada parâmetro alpha, sendo o mais baixo zero e o mais alto três.

7 Conclusões

Neste trabalho foi implementado, com êxito, o modelo trinomial modificado desenvolvido por Boyle and Tian (1999) recorrendo ao Matlab. Com o intuito de aprofundar o trabalho de Boyle and Tian (1999), onde se assume o valor de α no intervalo $[0,2]$, o parâmetro α foi generalizado para $\alpha > 2$.

Foi feita a avaliação de opções europeias de compra, *standard* e com barreira, obtendo-se a Tabela 1 com os mesmos valores apresentados por Boyle e Tian (1999), como era expectável. Com vista a completar o conhecimento sobre a avaliação de opções, foi realizada também a avaliação de opções europeias de venda, *standard* e com barreira.

Ainda nas opções com barreira foi aceite o desafio de estender também a avaliação às opções *knock-in*, o que foi elaborado com sucesso.

Além disto, e porque seria interessante avaliar opções de barreira com *rebate* não nulo, o programa foi adaptado de modo a receber esta constante. Não obstante, em todas as tabelas o *rebate* é igual a zero. É de referir que na determinação do preço de todas as opções assume-se que o instante de avaliação é a data actual, ou seja, em $t_0 = 0$.

A análise de Boyle and Tian (1999) foi também desenvolvida para avaliar contratos com uma *dividend yield* diferente de zero ($q \neq 0$), sendo um dos contributos mais importantes deste trabalho.

Através dos resultados obtidos é evidente que o valor de α tem impacto na avaliação de opções. Nas tabelas apresentadas anteriormente é possível observar que com o aumento do valor de α de zero até três, o valor da opção aumenta ou diminui monotonamente. Também curioso é o facto de o valor de α ter um impacto muito mais forte sobre os preços das opções barreira, especialmente nas opções *up-and-out*

e *double-knock-out call*. Estes factos são discutidos pormenorizadamente no paper de Boyle and Tian (1999).

Referências

- Black, Fischer, 1976, The Pricing of Commodity Contracts, *Journal of Financial Economics* 3, 167–179.
- Black, Fischer and Myron Scholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy* 81, 637–654.
- Boyle, Phelim, 1986, Option Valuation using a Three-Jump Process, *International Options Journal* 3, 7–12.
- Boyle, Phelim, 1988, A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, 1–12.
- Boyle, Phelim and Sok Hoon Lau, 1994, Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method, *Journal of Derivatives* 1, 6–14.
- Boyle, Phelim and Yisong Sam Tian, 1999, Pricing Lookback and Barrier Options under the CEV Process, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 4, 241–264.
- Carr, Peter, 1995, Two Extensions to Barrier Option Valuation, *Applied Mathematical Finance* 2, 173–209.
- Christie, Andrew, 1982, The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects, *Journal of Financial Economics* 10, 407–432.
- Cox, John, 1975, Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions, *Unpublished Note, Stanford University (reprinted in Journal of Portfolio Management, 1996, 22, pp. 15-17)*.

- Cox, John and Stephen Ross, 1976, The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics* 3, 145–166.
- Cox, John, Steven Ross, and Rubinstein Mark, 1979, Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics* 7, 229–263.
- Emanuel, David and James MacBeth, 1982, Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, 533–554.
- Hull, John, 2010, *Options, Futures, and Other Derivatives*, 7th ed ed. (Prentice Hall Boston, Englewood Savage, MD).
- Jackwerth, Jens Carsten and Mark Rubinstein, 2001, Recovering Stochastic Processes from Option Prices, *Working paper, University of California, Berkeley, CA*.
- Kamrad, Bardia and Peter Ritchken, 1991, Multinomial Approximating Models for Options with K State Variables, *Management Science* 37, 1640–1652.
- Lo, Chi Fai and Cho-Hoi Hui, 2006, Lie-Algebraic Approach for Pricing Moving Barrier Options with Time-Dependent Parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 323, 1455–1464.
- Lo, Chi Fai, P H Yuen, and C H Hui, 2000, Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model with Time-Dependent Parameters, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 3, 661–674.
- MacBeth, James and Larry Merville, 1980, Tests of The Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models, *Journal of Finance* 35, 285–301.

- Merton, Robert, 1973, Theory of Rational Option Pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141–183.
- Reiner, Eric, 1994, In Search of Parsimony: Valuing Standard and Path-Dependent Options for Alternative Stochastic Processes, *Derivatives conf. Toronto, Canada*.
- Ritchken, Peter, 1995, On Pricing Barrier Options, *Journal of Derivatives* 3, 19–28.
- Rubinstein, Mark and Eric Reiner, 1991, Breaking Down the Barriers, *RISK* September, 28–35.
- Schmalensee, Richard and Robert Trippi, 1978, Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia, *Journal of Finance* 33, 129–147.

A Algoritmo de avaliação de uma opção Americana *standard call* em Matlab

```
function [val, C] = eval_american_call(S, P, K, X, disc)
fprintf('A iniciar a avaliacao american call');
s = size(S);
l = s(1);
N = s(2)-1;
C = zeros(s);

for j = 1:l

    C(j, N+1) = max(0.0, S(j, N+1) - X);

    if S(j, 1) ~= 0
        z = j;
    end
end

for i = [N:-1:1]

    for j = 1:l
        if S(j, i) == 0
            continue;
        end
    end
end
```

```

        end
        k = K(j,i);
        C(j, i) = disc* (P(j,i).pSub * C(z-k-1,i+1) + P(j,i).pCentro *
        C(z-k, i+1) + P(j,i).pDesc * C(z-k+1, i+1));
        C(j, i) = max(C(j,i), S(j, i) - X);

    end

end

val = sum(C(:,1));

end

```

B Algoritmo de avaliação de uma opção Americana *double knock-out call* em Matlab

```

function [val, C] = eval_double_knock_out_american_call
(S, P, K, X, Hs,Hi, disc, X_rebate)
fprintf('A iniciar a avaliacao american double knock out call\n');
s = size(S);
l = s(1);
N = s(2)-1;
C = zeros(s);

```



```

for j = 1:l
    if S(j, N+1) < Hs && S(j, N+1) > Hi
        C(j, N+1) = max(0.0,S(j, N+1)-X);
    else
        C(j, N+1) = 0.0;
    end

    %indice da raiz
    if S(j, 1) ~= 0
        z = j;
    end
end

for i = [N:-1:1]

    for j = 1:l

        if S(j, i) == 0
            continue;
        end
        k = K(j,i);
        if S(j, i) < Hs && S(j, i) > Hi
            C(j, i) = disc* (P(j,i).pSub * C(z-k-1,i+1) + P(j,i).pCentro *
            C(z-k, i+1) + P(j,i).pDesc * C(z-k+1, i+1));
            C(j, i) = max(C(j,i), S(j, i) - X);
        else

```

```

        C(j, i) = X_rebate;
    end
end

end

val = sum(C(:,1));

end

```

C Algoritmo de avaliação de uma opção Americana *double knock-in call* em Matlab

```

function [val, C] = eval_double_knock_in_american_call
(S, P, K, X, Hs,Hi, disc, X_rebate)

s = size(S);
l = s(1);
N = s(2)-1;
[val, C] = eval_american_call(S, P, K, X, disc);
fprintf(' double knock in');
for j = 1:l
    if ~(S(j, N+1) >= Hs) || (S(j, N+1) <= Hi)
        C(j, N+1) = X_rebate;
    end
end

```

```

%indice da raiz
if S(j, 1) ~= 0
    z = j;
end
end

for i = [N:-1:1]

    for j = 1:l

        if S(j, i) == 0 || S(j, i) >= Hs || S(j, i) <= Hi
            continue;
        end
        k = K(j,i);
        if (S(j, i) >= Hs) || (S(j, i) <= Hi)
            C(j, i) = disc* (P(j,i).pSub * C(z-k-1,i+1) + P(j,i).pCentro *
            C(z-k, i+1) + P(j,i).pDesc * C(z-k+1, i+1));
            C(j, i) = max(C(j,i), S(j, i) - X);
        else
            C(j, i) = disc* (P(j,i).pSub * C(z-k-1,i+1) + P(j,i).pCentro *
            C(z-k, i+1) + P(j,i).pDesc * C(z-k+1, i+1));
        end
    end
end

end

```

```
val = sum(C(:,1));
```

```
end
```